

CAPÍTULO

2

O Quociente de Diferença, Limites e Continuidade

Objetivos Deste Capítulo

1. Definir o Quociente de diferença
2. Definir limite e aplicar o comando *limite* do Maple
3. Conhecer as propriedades dos limites
4. Usar as propriedades de cálculo do Maple para explorar o conceito numérico de um limite
5. Determinar o teorema “Squeeze”
6. Determinar o teorema de valor médio
7. Conhecer a definição de continuidade e aplicar o comando *iscont*

Comandos do Maple Usados Neste Capítulo

-> Notação funcional. *Exemplo* : $\text{sq} := x \rightarrow x^2$ é a função quadrática.

$(f@g)(x)$ Composição funcional: $(f@g)(x) = f(g(x))$.

$@@$ Operador de composição repetida: $(f@@3)(x) = f(f(f(x)))$.

$[[x1, x1], [x2, y2]]$ Uma lista de ponto cartesianos de x e y . Usados no comando *plot*.

$\text{abs}(x)$ Função do valor absoluto no Maple: $\text{abs}(x) = |x|$

$\text{color} = \text{black}$ Opção de plotagem, Assegura que a cor da curva seja preta.

Digits O comando *digits := 20* faz com que o Maple trabalhe com uma precisão de 20 dígitos em seus cálculos numéricos.

evalf Avalia expressões, reduzindo-as a sua forma decimal

Labels =

['x-label', 'y-label'] Opção de plotagem. Os eixos são relacionados a uma lista de nomes.

Limit(f(x), x=a); Forma inerte do comando *limit*

Limit(f(x), x=a, right); Forma inerte do limite a medida que o valor de x se aproxima de a pela direita.

Limit(f(x), x=a, left); Forma inerte do limite a medida que o valor de x se aproxima de a pela esquerda.

assume (x<1); Determinar restrições à variável x.

is(x>3); Testa a inequação, o comando tem o retorno true (verdadeiro) false (falso) ou FAIL (falha).

iscont(1/x, x=-1 .. 1); Testa a continuidade da função 1/x no intervalo -1 .. 1.

expand(f(x)); Expande a expressão f(x) que geralmente é um polinômio ou uma fração racional.

f1 := (x)-> if is(x>3)

Then sqrt(x) else 0 fi Definição de uma função descontínua.

fsolve

(F(x) = 0, x, 3/4 .. 7/8); Resolução numérica onde o resultado está em um intervalo dado.

limit(f(x), x=a); Calcula o valor do limite de uma função quando x se aproxima de a.

limit(f(x), x=a, right); Calcula o valor do limite quando x se aproxima de a pela direita.

limit(f(x), x=a, left); Calcula o valor do limite quando x se aproxima de a pela esquerda.

Simplify (expressão) Aplica regras de simplificação a uma expressão.

sin(x) Função trigonométrica seno.

subs (x=3, x=1) O comando de substituição. Aqui a variável x recebe o valor 3.

value (expressão) Avalia funções inertes como *limite*.

As Origens do Quociente de diferença (Entre Infinitésimos)

O cálculo que você estuda em um curso introdutório estará principalmente concentrado em funções suaves. Você pode imaginar uma função suaves de forma que possa ser desenhada sem tirar a caneta do

papel. Existem vários exemplos de funções suaves na ciência e engenharia, como mostramos à frente. A temperatura de um museu é geralmente monitorada por um tipo de termômetro que expõe a variação semanal de temperatura num relatório. Este relatório mostra que a temperatura sobe e desce gradativamente, de uma forma contínua. Este processo ocorre até com as paradas súbitas de automóveis em colisão (em uma área de teste, esperamos) podem ser medidas por instrumentos ou por fotografias de alta velocidade. Estes mostram que os carros não param subitamente. Na verdade a velocidade vai gradativamente para zero, mas logicamente num período mínimo de tempo. Em nenhum momento a velocidade pula de um valor para o outro sem passar pelos valores intermediários.

Vamos trabalhar com a idéia de um carro em movimento. Ao invés de examinar um acidente, vamos examinar as ocorrências diárias, assim como entrar no carro e sair dirigindo. Como de costume na matemática fazemos algumas simplificações, o carro está virado para a direção que você quer ir. Não há nada em seu caminho. Você dá a partida no carro pisa no acelerador e o carro começa a andar. Você percebe que o velocímetro move-se gradativamente de 0 para 30 milhas por hora em 15 segundos.

Esta situação aparentemente simples contém algumas idéias um tanto abstratas. O que significa “o carro começa a andar”? Como se mede objetos em movimento? A sua resposta mais provável é: “Bem, o carro estava parado, quando eu dei a partida e pisei no acelerador ele começou a se movimentar. Só que nós temos um novo conceito de velocidade. Obviamente a velocidade está relacionada a movimento. Você diria que velocidade é a medida do movimento. Quanto maior a velocidade maior o movimento. Infelizmente este argumento dá voltas e acaba que velocidade e movimento parecem expressar a mesma idéia. Logo, qual é o próximo passo?

A ciência requer medidas e unidades. Para refinar nossa noção de velocidade, nós precisamos encontrar uma maneira de calcular um valor numérico. Até porque os fabricantes de carros já o fizeram, e o chamaram de velocímetro. Qual definição de velocidade eles utilizaram? A velocidade é definida pela razão entre a distancia percorrida e o tempo exigido. Se você estiver dirigindo a 60 milhas por hora por um minuto você deve ter passado por um milha ($60 \frac{mi}{hr} \times \frac{1}{60} hr = 1mi$). Você pode ter uma objeção, dizendo que você precisa esperar um minuto até poder efetuar a medição. E ainda a velocidade deve ser constante durante todo o minuto.

Agora chegamos à razão de estarmos tratando deste exemplo no capítulo de limites. Se tentarmos e refinarmos a definição de velocidade para tratar destas objeções. Nos defrontaremos com as idéias principais do cálculo. Na verdade o cálculo foi definido por Issac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz no século XVII como uma maneira de tratar com os conceitos de movimento. Vamos voltar ao exemplo do carro. Vamos realizar uma experiência que nos permitirá fazer medições precisas deste movimento. Vamos posicionar uma grande fita métrica ao longo da pista de forma que poderemos medir a distancia percorrida a qualquer momento. Vamos usar uma câmera

de vídeo que numera precisamente cada quadro com altíssima precisão. A câmera grava 15 quadros por segundo, então, quando reproduzirmos o movimento poderemos medir a posição do carro para cada 1/15 de segundo. Agora nós podemos inventar uma nova definição para a velocidade do carro. É a distância percorrida dividida pelo intervalo de tempo, o que neste caso funciona com a distância percorrida em um 1/15 de segundo multiplicado por 15. Se quisermos saber a velocidade do carro a qualquer momento, digamos ao fim dos 10 segundos (s), posicionamos a fita para a marca dos 10 segundos e medimos a posição do carro. Avançamos um quadro e medimos a posição novamente. E aqui está a nossa fórmula.

Velocidade do carro a 10 s = ((posição do carro em 10 s + um quadro) – (posição do carro em 10 s)) X 15

Agora nós faremos uma fórmula matemática para velocidade. Digamos que a posição do carro a qualquer instante será dada pela função $s(t)$. Chamaremos a velocidade de v . Podemos plotar a função em intervalos de 1/15 de segundo usando nossa fita. A velocidade a 10 s é:

$$v_t = 10s = \frac{s(10 + \frac{1}{15}) - s(10)}{\frac{1}{15}} \quad (2-1)$$

Vamos supor que as medições da fita são feitas em pés e cada pé é dividido em centésimos. Você mede a distância percorrida checando a posição do carro no enquadramento da fita em 10 s e em 10 + 1/15s. Digamos que as leituras são 146.67pés e 148.63 pés, respectivamente. Substituindo estes valores na fórmula, temos o seguinte para a velocidade em 10 segundos:

$$v_t = 10s = \frac{148.63 ft - 146.67 ft}{\frac{1}{15}} = 1.96 \times 15 = 29.4 ft/s \quad (2-2)$$

Impressionado com o seu resultado, você explica isso a um amigo, que levanta uma questão que você não havia considerado. A velocidade do carro está mudando constantemente. Como você pode dizer que o carro estava a 29.4 pés por segundo durante de 1/15 de segundo. Então o seu amigo mede a posição do carro em 10 + 2/15 s e acha 150.60pés. Ele calcula a velocidade usando a fórmula

$$v_t = 10 + \frac{1}{15} s = \frac{150.60 ft - 148.63 ft}{\frac{1}{15}} = 1.97 \times 15 = 29.55 ft/s \quad (2-3)$$

Agora está a questão. Em 10s o carro estava a 29.4 pés /s. a 1/15 de segundo mais tarde já estava a 29.55 pés/s. Será que a velocidade pulou de uma para a outra? Seria um passeio meio sacudido! Pior os pulos na velocidade parecem ser dependentes do intervalo

de tempo usado nos quadros da fita. E se a câmera tivesse uma característica que a permitisse gravar imagens em câmera lenta? Se cada quadro da filmagem catalogada em cada centésimo de segundo a leitura de distancia em 10s seria a mesma, ou seja, 146,67 pés. Mas, o próximo quadro, um centésimo de segundo depois, mostraria o carro 146,96pés. O mesmo calculo para estes números dá uma velocidade de 29pés/s.

Admitimos que os cálculos dão resultados similares. Você pode afirmar com convicção que a velocidade do carro quando o relógio marca 10s está em cerca de 29 pés/s. Mas, isto está preciso o bastante? A ciência e a engenharia requerem conceitos e medidas precisas. Deixaremos a questão de uma definição precisa de lado por um momento para dar uma olhada em sua relação com a distancia percorrida.

Podemos encontrar a velocidade do carro entre quaisquer dois quadros consecutivos na fita. Vamos imaginar faze-lo em todos os quadros emparelhando-os. Nós poderíamos criar uma tabela de velocidades para cada 1/15 de segundo, de $t=0$ até $t=15$ segundos. Agora estamos sujeitos a nos enrolarmos em nosso próprio argumento usando estas velocidades para calcular a distancia percorrida pelo carro em cada intervalo de tempo. Vamos começar com estes dois quadros, $t=0$ e $t=1/15$ s. A distancia percorrida em $t=0$ é $S_0=0$ porque o carro ainda não se moveu. A medição de distancia a $t=1/15$ s é 0.0065pés, muito pequena para ser medida em nossa fita. Mas, vamos aceitar uma leitura extremamente precisa. Usando estes valores, nós podemos calcular a distancia substituindo-os na fórmula

$$S = v \times \frac{1}{15} S_0 \quad (2-4)$$

Quando calculamos a distancia percorrida usando a fórmula de velocidade, nós obtemos a distancia percorrida durante um especifico 1/15 de um segundo, e não a distancia percorrida total. Para obter a distancia percorrida desde o inicio precisamos adicionar todas as distancias até o intervalo em questão. Esta é a razão para o termo S_0 . Esta será a distancia acumulada. Nós adicionamos todas as distancias parciais para obter a total. Mas, será que este total, que foi obtido adicionando todas as parciais vai concordar com o ultimo quadro da fita? O ultimo quadro mostra o carro em sua distancia final. Não há discussão com a posição do carro mostrada na fita, que tem que mostrar a distancia total percorrida. Nossa lógica nos diz que se medirmos a distancia percorrida durante cada para de quadros e se nós somarmos todos eles temos que chegar à distancia final. (Note que mesmo as medições sendo feitas com a aproximação de um milionésimo de polegada o resultado das parciais não seriam igual a distancia total. A razão está relacionada com o conceito de pulos mencionados anteriormente. A velocidade está mudando suavemente à medida em que o carro acelera, mas a fórmula calcula uma nova velocidade a intervalos de 1/15 de segundo. E os tempos entre estas marcas, qual era a velocidade?)

No primeiro intervalo de tempo, o cálculo de distância nos mostra $S_0= 0.1$ pés o que podemos até engolir, mas permanece um pequeno problema. Este cálculo nos dá algo diferente de zero apesar de sabermos que o carro estava parado em $t=0$. Ele iniciou o movimento logo após $t=0$. Podemos ultrapassar esta dificuldade se observarmos que a fórmula desenvolvida é de velocidade média.

No início do intervalo, o carro estava mais devagar do que estava no fim do intervalo de tempo. Em algum lugar neste tempo, a velocidade média deve ocorrer. Agora nós parecemos estar saindo de nosso objetivo! Nós encontramos dificuldades conceituais quando tentamos definir a velocidade que estava mudando. Nós regredimos a um conceito de velocidade média ao invés de alcançar o nosso objetivo o que era definir a velocidade, e não a velocidade média. Mas, tal definição é possível?

A definição é dada mais adiante neste capítulo, mas vamos rever o que já observamos. Qualquer grande conceito (ou qualquer grande problema) em cálculo foi exposto a este chamado exemplo cotidiano. As questões a serem respondidas são :

1. Como tornar exato algo que está continuamente mudando?
2. Como definir uma quantidade em mudança, como velocidade, de forma que não dependa do intervalo?
3. Como somar todas as partes (como as distancias parciais) e obter o total correto?

Mesmo que cientistas como Newton e Leibniz tenham descoberto o cálculo os alguns matemáticos levaram anos para resolver estas armadilhas lógicas que forma encontradas durante o trabalho em problemas similares ao nosso exemplo. Eles tiveram sucesso assim como você pode ter! A primeira tarefa é explorar a noção de suavidade. Isto pode ser feito por um processo de subdivisão. Os matemático descobriram que existem dois conceitos relacionados aqui. Eles são chamados de limite e continuidade. Você iniciará estes estudos neste capítulo. Armado destes dois conceitos, você pode começar o estudo do ponto 2, o que é o estudo do cálculo diferencial. Você descobrirá que pode ser visto como um problema de tangente. O cálculo da velocidade de um carro pode ser relacionado ao problema de encontrar a tangente de uma curva. Neste caso a curva é um gráfico de tempo e distancia. Estes conceitos são apresentados com detalhes nos capítulos 3 e 4. O ponto 3 nos leva ao cálculo integral o que pode ser visto como a área abaixo da curva. O método de calcular a distancia total percorrida somando as parciais pode ser relacionado à área abaixo do gráfico de velocidade- tempo. As idéias do ponto 3 serão analisadas nos capítulos 5 e 6.

Variação fracionária e de Porcentagem

Não se sinta intimidado pelo cálculo. Você já está familiarizado com suas idéias básicas. O cálculo diferencial está proximamente relacionado a tópicos como velocidade média, mudança de razão variação fracionária e de porcentagem. Você já viu a definição de velocidade média na ultima seção, agora veja os conceitos de variação fracionária e variação de porcentagem. A razão para estes cálculos é para obter a medida de crescimento ou decrescimento relativo de alguma quantidade. Se você trabalha para uma empresa e você precisa enviar um extra de 400 quilos de um produto, você vai encontrar um problema com o seu transportador?

Provavelmente não se a carga completa for de 400,000 quilos e ela estiver sendo enviada num navio cargueiro. Agora se tornará um problema se a carga original for de 400 quilos e estiver indo num caminhão. No primeiro caso 400 quilos extras serão como uma gota num balde. No segundo caso 400 quilos a mais dobra a carga.

A mudança de percentagem causada pelos 400 kg adicionais, que será diferente nos dois casos fornece uma boa noção do efeito que pode ser causado pela adição desta quantidade.

A definição de mudança de fração é bem óbvia. Considere uma determinada quantidade cujo valor muda. A quantidade pode ser o valor de uma moeda estrangeira num determinado dia, o preço da gasolina num posto ou a mudança no número de átomos de seu corpo causado pelo consumo de uma refeição. Chame o valor base de uma quantidade de b e o novo valor da quantidade de n . A variação fracionária é definida como

$$\text{Mudança de fração} = \frac{n-b}{b} \quad (2-5)$$

A variação de percentagem é a própria mudança de fração multiplicada por 100

$$\text{Variação de percentagem} = \frac{n-b}{b} \times 100 \quad (2-6)$$

Começaremos com um exemplo de variação de percentagem.

Exemplo 2-1 Onde estão as promoções?

Maeve Mobeley estava querendo um novo par de tênis de corrida, mas estava esperando por uma determinada loja coloca-los em promoção. Infelizmente fez com que o preço dos tênis que era anteriormente de \$113.95, passasse para 119.95. Qual foi o aumento de percentagem no preço destes tênis?

Resolução: Use a equação 2-6 com $b = 113.95$ e $n=119.95$.

$$\text{Variação de percentagem} = \frac{n-b}{b} \times 100 = \frac{119.95 - 113.95}{113.95} \times 100 = 5.27\%$$

Naturalmente este cálculo pode ser feito no Maple:

>(119.95-113.95)/113.95*100;

5.265467310

Desde que a mudança de fração no preço dos tênis é 0.0527, a mudança de percentagem é 5.27% Maeve poderia dizer, “O preço dos tênis que eu queria comprar subiu uns 5%” Será que este valor do aumento de percentagem permite que você calcule o novo preço, baseado no preço original?

Você pegaria o preço original , \$113.95, acharia 5.26546731% deste valor e somaria a \$113.95.

$$>13.95*0.05265467310+113.95;$$

$$119.9500000$$

Aplicar o aumento de porcentagem realmente produz o novo preço de venda!

Sua vez

- (a) em economia, a idéia básica de inflação está relacionada ao aumento no custo de uma “cesta de compras” de itens de consumo. Em 1995, o custo destes itens era de \$456.78. Se os mesmos itens custarem \$473.12 e, 1996, qual a razão da inflação de 1995 – 1996? De a resposta em porcentagem.

Resposta:_____

- (b) Se esta razão de inflação permanecer o mesmo para 1997, quanto custarão os itens?

Resposta:_____

No estudo de cálculo, é mais comum usar mudanças de fração ao invés de convertê-las em porcentagens. A maioria das pessoas usam porcentagens em conversas normais, em reportagens, e em outras formas de relatórios. Você deve se sentir confortável trocando de um maneira para a outra de dizer a mesma coisa. Se você passar um tempo estudando para compreender profundamente o conceito de mudança de fração, não terá nenhuma dificuldade com cálculo diferencial. A derivada que você estudará brevemente (no capítulo 3) , está bem relacionada ao conceito de variação fracionária, com o conceito de limite já embutido.

Razão de Mudança

Sempre que algo muda de valor é natural fazermos a pergunta: “qual a velocidade da mudança desta quantidade?” A coisa a ser medida pode ser a altura de uma criança em época de crescimento, o número de automóveis vendidos nos E.U.A. ao longo dos anos ou até a distancia entre dois continentes enquanto obedecem as correntes do centro da terra. Os números a serem medidos podem ser grandes ou pequenos logo pode ser útil usar a fórmula de mudança de fração, equação 2-5, na maioria dos casos. Formando uma razão, geralmente o resultado pode ser mais significativo do que simplesmente informar a mudança da variável. Por exemplo se te disserem que a população de uma certa cidade fosse aumentar em 532 por conta de uma re-locação de funcionários de uma fábrica. Você seria capaz de concluir que haveria uma procura muito grande de casas e os preços subiriam? Você não poderia fazê-lo até que soubesse a população original da cidade. Se a cidade fosse Nova York onde existem milhares de casas no mercado a qualquer hora, 532 novos moradores podem nem ser notados. Mas se a cidade for pequena, de população

5.367, o efeito pode ser o paraíso dos vendedores. Números efetivos são geralmente menos significativos que números relativos. E a fórmula para a mudança de fração fornece a comparação necessária.

Considere o problema de medir a quantidade de uma bactéria em um experiência controlada por laboratório. O número da bactéria num contêiner de cultivo é medido de hora em hora. O tanque só pode manter um número Máximo de N bactéria. Que seja a população a qualquer tempo t de $P(t)$. Então a população normalizada pode ser definida como $p(t)$ que representa a fração da população total possível, ao invés de falarmos de $P(t)$ um número que pode estar em centenas de bilhões, considerando que estamos falando de bactérias e elas podem ser bem numerosas. A razão do crescimento da população pode ser definida por $p_{t+1} - p_t$, e a razão de crescimento fracionário como

$$\frac{p^{t+1} - p_t}{p_t}$$

Quociente de Diferença

O conceito da razão de mudança e sua relação com a variação fracionária pode ser estudada por examinar alguns modelos de crescimento de população. A equação logística é $y = x + rx(1-x)$. Nós derivaremos esta equação.

Biólogos freqüentemente medem populações em períodos definidos de tempo. Por exemplo, populações de animais podem ser medidas a cada ano, depois que os jovens nascem. Digamos que a população do cultivo de bactérias seja medida a cada hora. Neste caso o crescimento da população de uma hora para a outra é dado por $p_{t+1} - p_t$, e a razão de crescimento fracionário é

Razão da mudança de fração em um período de tempo = $(p_{t+1} - p_t) / p_t$

Exemplo 2-2 Cálculo de uma Razão Específica de Crescimento

Ao início da experiência a população da bactéria *E. Coli* era 17% do número Máximo que pode existir no tanque. A contagem é feita a cada hora depois disso, a próxima contagem feita uma hora depois mostrou a população sendo $p_{t+1} = 17.67\%$. Qual foi a razão de crescimento fracionário por hora?

Solução: Aplique a fórmula, $(.1767 - .17) / .17 = 0.0394$ por hora Logo, o crescimento das bactérias está em cerca de 4% por hora.

Sua vez: Em um determinado tempo o número de peixes em um tanque p_t é de 500.000. Um dia depois a população foi medida em 450.000. Qual a razão de crescimento fracionário por dia? Note que agora o trabalho é negativo!

Resposta: _____

O Modelo de População

Um modelo simples de dinâmica de população pode derivar da conclusão de que a razão de crescimento da população é proporcional à diferença entre o tamanho atual da população e a população máxima possível. Esta quantidade é chamada de déficit de população.

Na equação 2-8, a razão de crescimento da população é $(p_{t+1} - p_t) / p_t$. O déficit de população é a diferença entre a população em qualquer tempo dado e a população máxima. Considerando que esta seja uma população normalizada, a população máxima é 1 e o déficit de população é $1 - p_t$. A equação para este modelo de população é $(p_{t+1} - p_t) / p_t = r(1 - p_t)$. Neste modelo a razão de crescimento depende de duas coisas, do déficit de população e o número r que é como se mede a razão de reprodução da espécie.

No exemplo 2-2, nós vimos que a razão de crescimento para a situação era 0.0394 por hora. Isto significa que $r = 0.0394$? Pense antes de responder! Substituindo os números dados no modelo de população temos $(0.1767 - 0.17)/0.17 = r(1 - 0.17)$. Resolvendo por r obtemos as seguintes equações

$$0.0394 = 0.83r$$

$$r = 0.0394 / 0.83 = 0.475$$

A razão de crescimento é na verdade 0.0394, mas o déficit de população deve ser levado em conta para calcularmos r .

Podemos criar uma tabela de valores para prever os valores a cada hora e usar os valores para plotar a variação da população através do tempo. Vamos definir uma função do Maple para nos ajudar a realizar o trabalho. Resolva a equação 2-8 para p_{t+1} . Logo $p_{t+1} = p_t + p_t r(1 - p_t)$. Que $x = p_t$ e chame a função que calcula p_{t+1} simplesmente de p . A função do Maple é

```
> p := x -> x + r * x * (1 - x);
```

$$p := x \rightarrow x + rx(1 - x)$$

Nós temos um valor para r neste exemplo, então podemos definir uma nova função $p1$ com este valor de r :

```
> p1 := x -> x + 0.0475 * x * (1 - x);
```

$$p1 := x \rightarrow x + .0475 x (1 - x)$$

Vamos testar esta função dando a população inicial de 0.17 e ver o que será previsto para a população no próximo período de tempo:

```
>p1(0.17);
```

```
.17670225
```

O modelo prevê a mesma população ao fim de uma hora como podemos ver.

Existem varias maneiras de se criar uma tabela. Você pode proceder passo a passo. Calcule $p_1(0.17)$, copie o resultado, que é 0.1767. Você poderia continuar desta forma até que tenha pontos suficientes para criar um gráfico. O Maple permite que você automatize estes passos uma vez que você tenha decidido o que fazer. O comando para produzir uma sequência de cálculos é simplesmente *seq*. Pó exemplo o comando para produzir a sequência de números de 2 a 13 é

```
>seq(ii, ii=2..13);
```

```
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13
```

Perceba que *ii* foi usado como variável. É melhor usar duas letras em comandos que se tratam de seqüências porque você pode ter usado a variável simples *i* em algum outro lugar da área de trabalho, visto que é bem menos provável que você já tenha usado *ii*. Agora vamos construir o comando para produzir uma sequência dos atributos de população. Você pode ver que tem que aplicar a função à ela mesma de uma forma repetitiva. O Maple também tem um comando para isso! Para encontrar a população no terceiro intervalo de tempo, emita o comando

```
>(p1@@3)(0.17);
```

```
.1907326814
```

Teste este comando . Troque o 3 por 1 e calcule a população no primeiro intervalo de tempo. Você vai verificar que é 0.1767. Você pode até checar em $t=0$ emitindo o comando $>(p1@@0)(0.17);$ e você verá que é 0.17, como deveria. Então você pode editar o comando mudando o 3 para todos os números na sequência 1, 2, 3, 4, 5... e gravando todos os números até que tenha o suficiente para um gráfico.

O Maple permite que você automatize o processo ainda mais. Um ponto é descrito ao Maple por envolver as coordenadas x e y em colchetes. Então nossos dois primeiros pontos na sequência são $[0, 0.17]$ e $[1, p_1(0.17)]$. Você já viu que pode ser escrito como $[2, (p1@@2)(0.17)]$. Perceba cuidadosamente os parênteses ao redor de $p1@@2$ e 0.17. É fundamental que os parênteses apareçam desta forma. Agora forme o comando de sequência.

```
>P := seq([n, (p1@@n)(.17)], n=0..100);
```

O comando calculou a população até o centésimo período de tempo, e gravou todos os dados da variável *P*. Tudo que tem a fazer é plotar *P* para ver o crescimento da população.

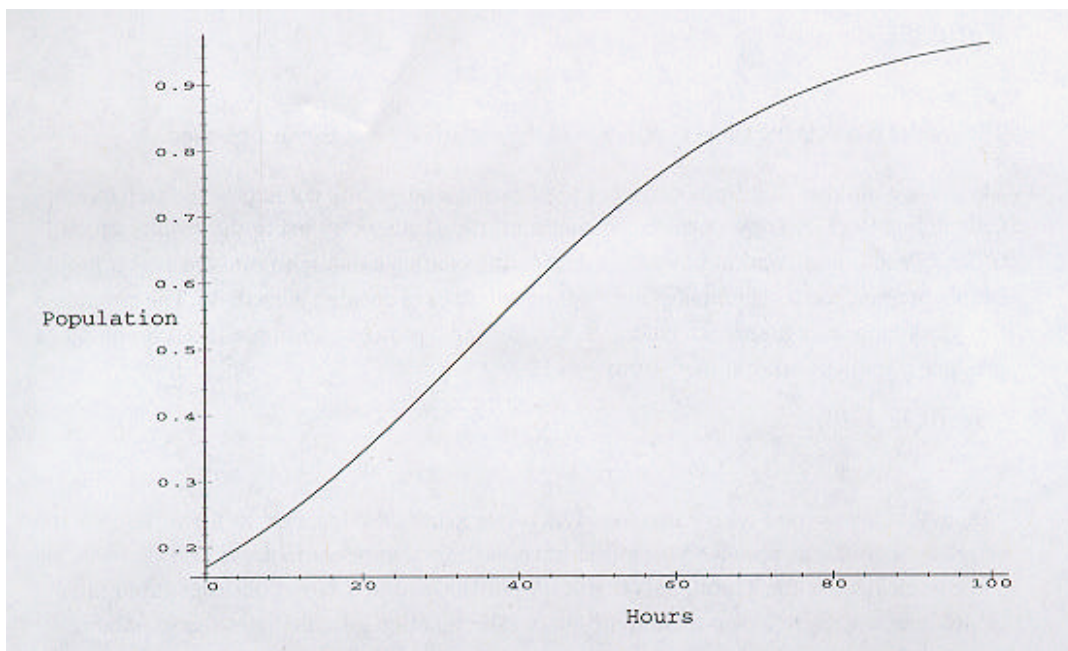


Figura 2.1 População de bactérias em função do tempo

>plot([P]);

Veja que P está entre colchetes também. Isto é essencial para que o comando plot funcione. Veja a forma do gráfico na figura 2.1. Primeiramente o gráfico se curva para cima. Isto é típico de uma população expandindo para um novo território com fontes de alimento abundantes. A medida em que a população cresce, a demanda para alimentos também cresce. Este modelo mostra que um equilíbrio é atingido entre as tendências que as populações tem de crescer e o limite imposto pela fonte de alimento. O modelo pode ser usado para prever quando a população vai atingir determinados níveis. Por exemplo, você pode estar interessado em saber quanto tempo levará para uma determinada população chegar a 50% de seu valor Máximo. O gráfico mostra que leva em torno de 34 períodos de tempo. Você pode checar emitindo o comando que diretamente calcula a população no período de tempo 34.

>(p1@@34)(0.17);

.5039286875

O cálculo direto verifica que a população atinge 50% de seu nível máximo após 34 períodos de tempo

Revisando o Quociente de Diferença

Você já viu como calcular a mudança de fração e a variação de porcentagem e como representar quantidades em forma de fração do seu valor máximo. Uma pergunta óbvia é, “Qual a velocidade do crescimento da população a qualquer tempo estipulado?”

Vamos buscar uma resposta para o período inicial. Vamos usar este exemplo para construir uma fórmula geral que será a fundação do cálculo diferencial. Nossa primeira definição da razão de crescimento é a mudança da população por unidade de tempo.

Definição 1: razão de crescimento = $(p_{t+1} - p_t)/1$

Esta formula funciona bem para qualquer situação onde a unidade de tempo natural é 1. Porém é uma boa idéia refinar esta definição da razão de crescimento de forma que o intervalo de tempo seja flexível. A definição permanece a mesma mas, a fórmula é diferente:

Definição 2: Razão de crescimento = $(p_{t+T} - p_t)/T$

Em nosso exemplo atual, T seria naturalmente 1, mas se escolhermos que T seja qualquer outro numero. Se resolvermos medir a população em intervalos de duas horas, T seria 2. Se avaliarmos a razão de crescimento com T=2, teremos

Razão de crescimento no período de 2 horas = $(0.1836 - 0.17)/2 = 0.0068$

Visto que a razão de crescimento no intervalo de 1 hora é

Razão de crescimento par a primeira hora = $(0.1767 - 0.17)/1 = 0.0067$

Você pode ver que as razões de crescimento são bem parecidas, mas não são idênticas. Isto não consegue ser satisfatório tendo em vista que os matemáticos gostam de aplicar regras definitivas que dão resultados exatos. Perceba a distinção entre a definição de razão de crescimento e a definição de mudança de fração. Os numeradores das frações são os mesmos nas duas definições mas, os denominadores diferem. No caso da mudança de fração o denominador é o mesmo que um dos termos do numerador. No caso da razão de mudança, o denominador é tempo. Quando nós calculamos a mudança de fração, o intervalo de tempo é tratado como uma parte auxiliar da descrição. A variável de tempo é mencionada explicitamente na fórmula da razão de crescimento. As fórmulas de mudança de fração são mais úteis quando o tempo para a mudança é obvio para qualquer um. As fórmulas da razão de crescimento são úteis quando o tempo no qual a mudança acontece é mais flexível.

O cálculo lida com o mais recente.

Vamos dar uma olhada no gráfico para os dois tempos mencionados na definição 2 (Figura 2.2). Se plotarmos os pontos para as horas 0, 1 e 2, o comando Maple é:

```
>plot([seq([n,(p1@@n)(.17)], n=0..2)]);
```

Vamos desenhar as linhas para formar os triângulos que mostram o quociente de diferença graficamente.

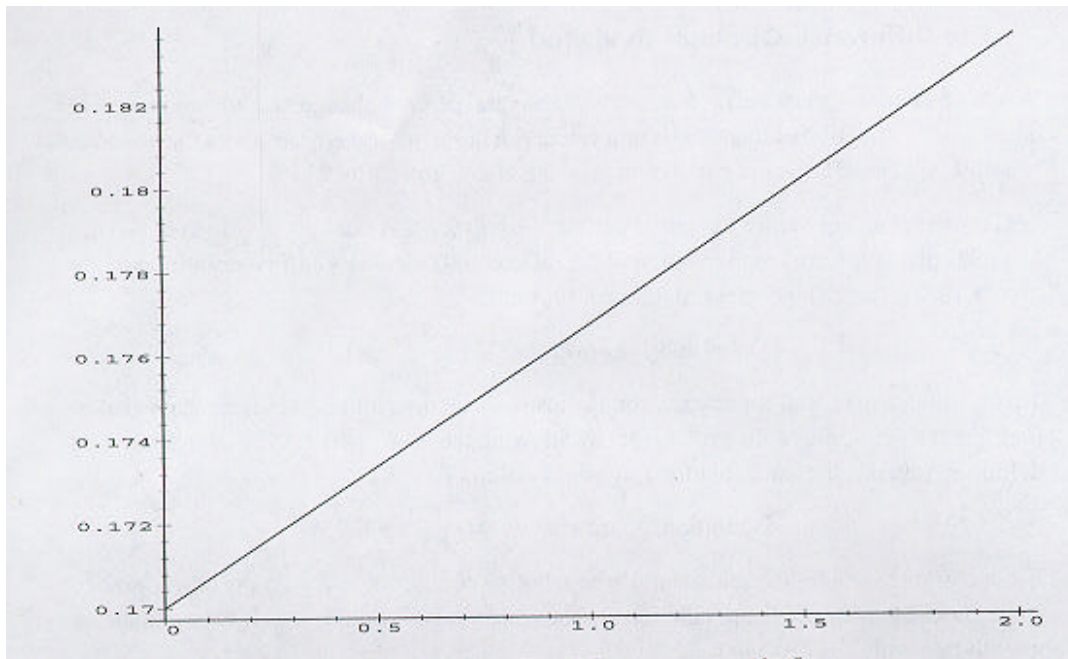


Figura 2.2 Linha de população unindo a primeira medição com a ultima.

```
> plot ([[1, 0.17], [1,p1(.17)]], [[2,0.17], [2,(p1@@2)(.17)]], [seq([n,(p1@@n)(.17)],
n=0..2)]], color = black);
```

Os dois triângulos parecem similares, que indica que as razões de seus lados são as mesmas (Figura 2.3). Se você examinar a linha de plotagem você verá uma leve quebra em $t=1$. Nós vimos que as razões de altura para as bases dos triângulos não são idênticas, considerando que a razão dos lados para o triângulo maior é 0.68, enquanto para o menor é 0.67.

Vamos rever nosso tópico em questão mais uma vez, desta vez buscando uma fórmula mais geral. Vamos utilizar a definição que já temos para a função, $y = f(x)$.

Queremos achar uma forma de responder a questão, “Como y muda em relação a x quando x cresce suavemente?” Esta é outra maneira de perguntar a respeito da razão de crescimento nós chamamos a fórmula para a razão de mudança de quociente de diferença.

Definição : A quociente de diferença é

$$DQ = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \quad (2-9)$$

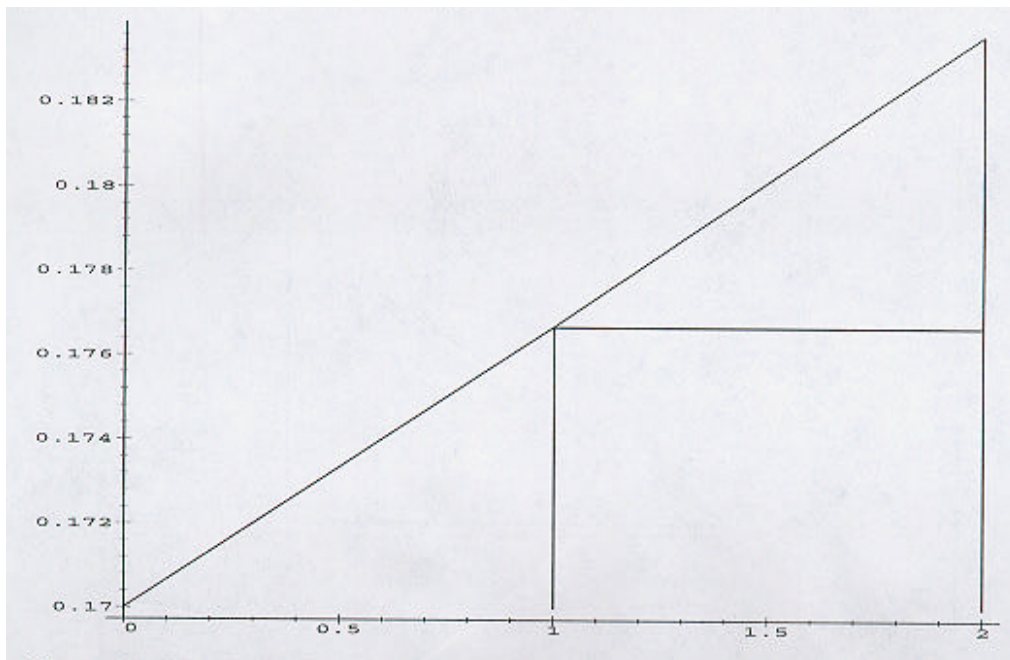


Figura 2.3 População de 0 a 1 hora, e depois 1 a 2 horas.

Da definição, observe que: (1) Esta é exatamente a mesma fórmula que a fórmula da razão de crescimento, com $T=dx$, $f=p$, e $x=t$. As variáveis tem nomes diferentes. Tirando isso são idênticas. (2) A forma pode ser escrita em forma simétrica

$$DQ = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (2-10)$$

Substituindo $x=x_1$, $dx=x_2$, e $x+dx=x_2$ na equação 2-9. É interessante visualizar a quociente de diferença graficamente. O exemplo específico será o crescimento da função $y=x^2$ de $x=1.5$ até $x=2.5$.

>plot({x^2, [[1.5,1.5^2], [2.5, 1.5^2], [2.5, 2.5^2], [1.5, 1.5^2]]}, x=1..3, color=black);

Se a função for suave, como esta, a hipotenusa do triângulo se posicionará próxima a curva $y= f(x)$, mas será claramente diferente da curva. Nós utilizamos dois pontos bem separados, em $x = 1.5$ e $x = 2.5$ (Figura 2.4). Se os pontos estiverem mais aproximados, a hipotenusa será quase indistinguível da curva. Por exemplo, escolha os pontos $x = 1.95$ e $x = 2.05$. O comando de plotagem para este valor é

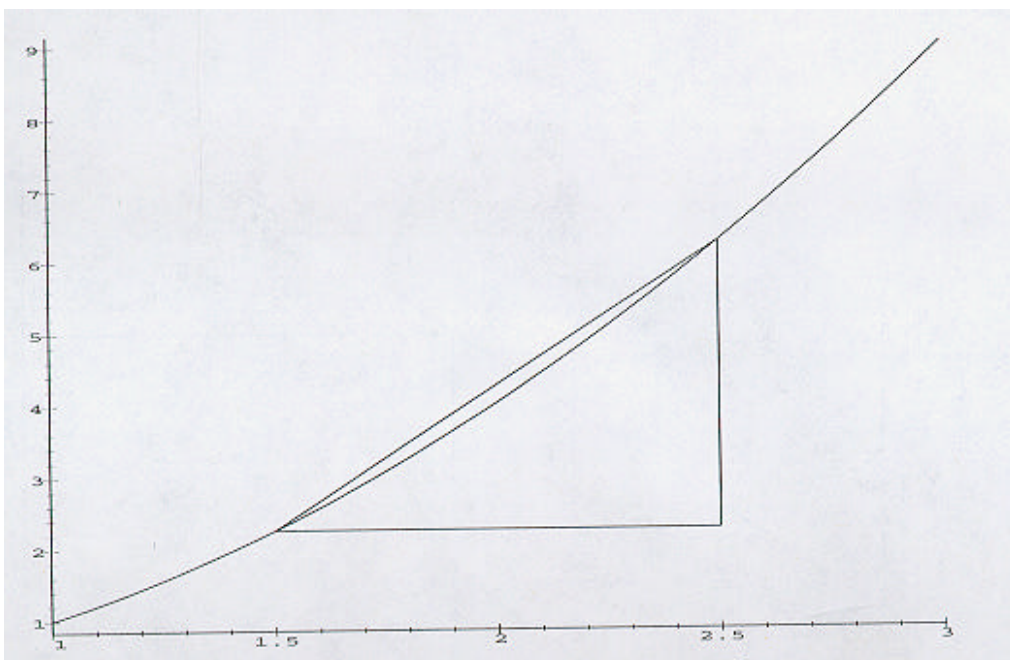


Figura 2.4 O quociente de diferença simétrico para a função x^2 em $x = 2$

```
>plot({x^2, [[1.95, 1.95^2], [2.05, 1.95^2], 2.05, 2.05^2], [1.95, 1.95^2]]}, x = 1.9..2.1,
color=black);
```

e tem apenas uma dica da diferença entre a hipotenusa e a curva $y = x^2$ (Figura 2.5).

Estas investigações nos levam a conclusão que um triângulo pequeno pode ser construído em qualquer lugar de uma curva suave e que a hipotenusa será quase indistinguível da curva. Lembre-se O triângulo é o resultado da fórmula para a quociente de diferença. A base do triângulo é dx , e a altura é $f(x+dx) - f(x)$. O cálculo diferencial começa calculando as fórmulas da quociente de diferença para varias funções. Veremos a função constante primeiro.

A Quociente de diferença Para Variação Constante, Linear e Quadrática

A função constante é na verdade apenas um número. No exemplo 2-3, o valor da função f é 5, não importando o valor de x . As funções constantes são bem comuns em situações reais. Por exemplo, considere a altura de um humano adulto. Que a função de altura seja $h(t)$.

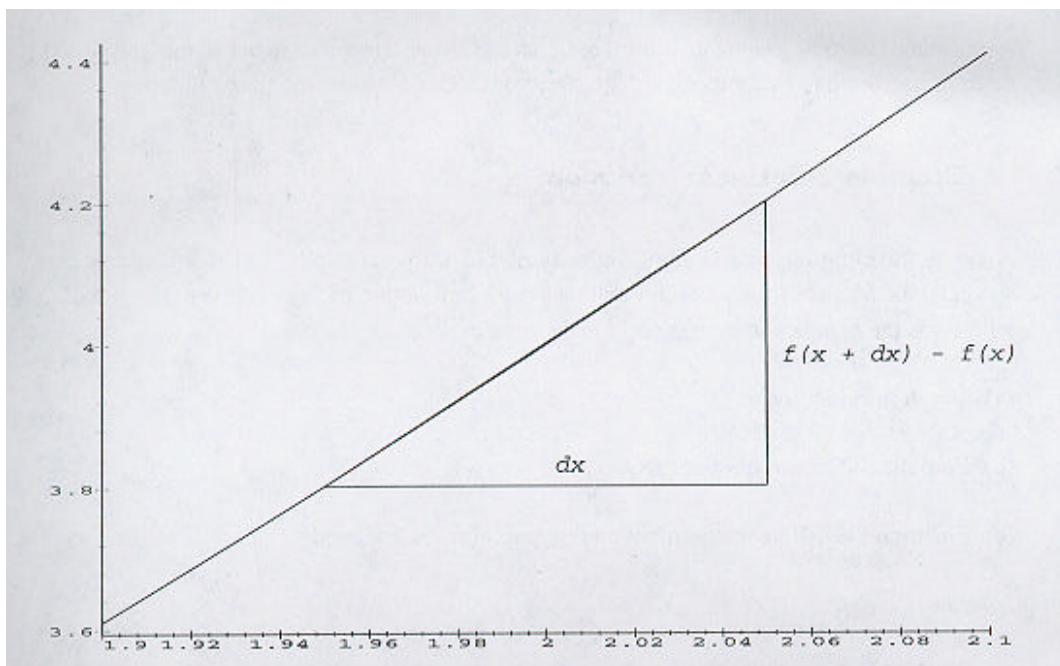


Figura 2.5 A quociente de diferença simétrica para $x = 2$ com um intervalo menor em Δx

Quando criança, a altura da pessoa aumentou de ano a ano. Uma vez que atinge a maturidade a altura da pessoa permanece a mesma por muitos anos. Durante este tempo, a altura da pessoa pode ser medida todo ano. O fato é que permanece a mesma está presente na forma funcional $h(t) = \text{constante}$.

Exemplo 2.3: O Quociente de Diferença de Uma Função Constante

Avalie o quociente de diferença para $f(x) = 5$

Resolução: O gráfico desta função é uma linha reta horizontal em $y = 5$. Em qualquer valor de x , a função é avaliada para 5. Logo, o quociente da diferença é.

$$(f(x+dx) - f(x)) / dx = (5-5)/dx = 0 \quad (2-11)$$

Se você tentar formar um triângulo na função $f(x) = 5$, não importa qual valor de dx você escolher, o lado y vai ser 0. Claramente, o fato de que a constante neste exemplo foi 5 não faz diferença. O resultado seria o mesmo para qualquer valor dado à constante.

Regra Geral 1: O quociente de diferença da função constante é zero.

$$\text{Se } f(x) = \text{constante, DQ} = 0$$

O gráfico de uma função constante é uma linha reta horizontal. Porém, e se o gráfico for uma linha reta mas fizer algum ângulo com o eixo x? Isto é uma função linear.

Exemplo 2-4: Variação Linear

Um carro está viajando ao longo de uma estrada reta a 117 quilômetros por hora (32.5 metros por segundo). Sua distancia de um determinado marco é dada como uma função de tempo $s = 32.5t$, onde s é a distancia em metros e t o tempo em segundos.

- (a) faça um gráfico da situação.
- (b) Ache a quociente de diferença DQ.
- (c) Ilustre a quociente de diferença no gráfico para $t = 2$ segundos.

Resolução:

- (a) O gráfico é uma linha reta, como é mostrado pelo comando plot (veja a Figura 2.6).

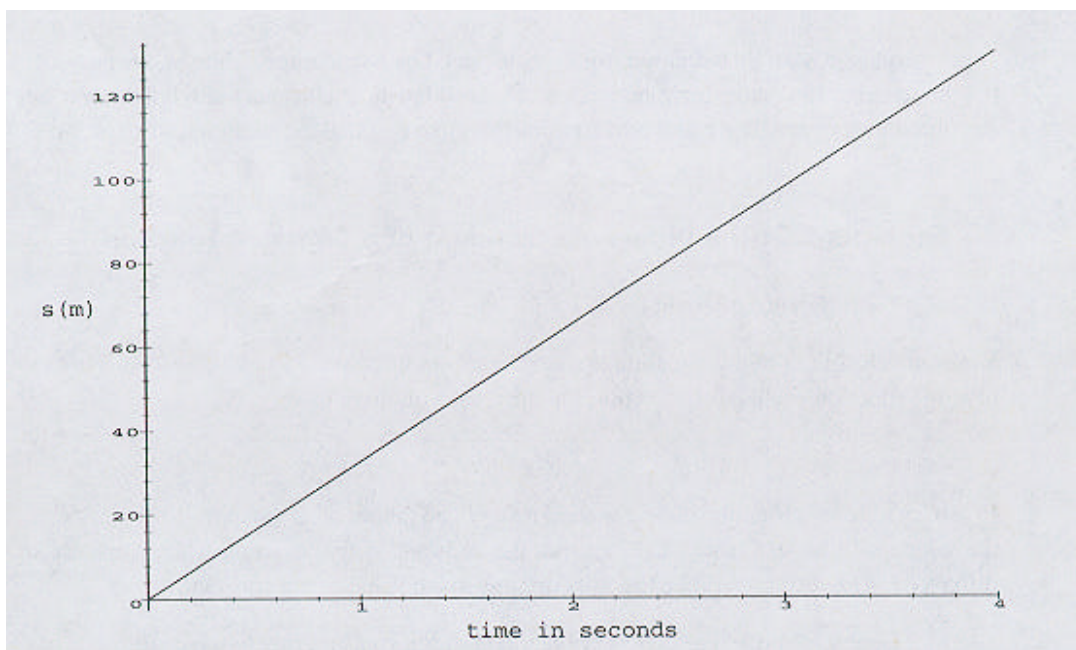


Figura 2.6 Gráfico tempo – distância para o exemplo 2-4

>plot(32.5*t, t=0 ..4, labels = ['time in seconds', 's (m)']);

(b) Para aplicar a fórmula da quociente de diferença, é necessária uma função. Neste caso você pode definir a função de distância como

> s := t -> 32.5*t;

$$s := t \rightarrow 32.5t$$

A distância a qualquer momento é dada por $s(t)$. Por exemplo, a distância $t = 10$ segundos é

>s(10);

325.0

Desde que não temos nenhum tempo específico para calcularmos a quociente de diferença, usamos a forma geral da fórmula

>DQ = (s(t+dt) – s(t))/dt;

$$DQ = \frac{s(t+dt) - s(t)}{dt} \quad (2-12)$$

Você pode ficar surpreso com o resultado. A quociente de diferença é uma constante, igual a 32.5. Se fizermos o calculo linear temos

$$DQ = (32.5(t+dt) - 32.5t)/dt = (32.5t + 32.5dt - 32.5t) /dt = 32.5dt/dt = 32.5$$

Os termos t e dt são cortados do calculo, deixando o resultado constante. Mais uma vez, o resultado é independente do tamanho de dt .

Sua vez : Calcule a quociente de diferença usando Maple.

Resposta: O comando do Maple apropriado é _____

(c) Para plotar o gráfico use o comando

>plot({s, [[1.5, s(1.5)], [2.5, s(1.5)], [2.5, s(2.5)]]}, 0 .. 4, color = black, labels = ['t (s)', 's(m)']);

Considerando que o gráfico é uma linha reta, todos os triângulos nessa linha vão ser similares (veja a Figura 2.7). A razão de seus lados é a mesma. Em geometria analítica você aprendeu que esta razão é chamada de inclinação da linha. Nos símbolos $dy/dx = m$.

Regra Geral 2: A quociente de diferença de uma função linear é uma constante

$$\text{Se } f(x) = cx, \text{ então } DQ = c$$

Antes de investigarmos a quociente de diferença para outros tipos de função, vamos dar uma olhada na quociente de diferença de combinações de funções. Em geral qual a quociente de diferença

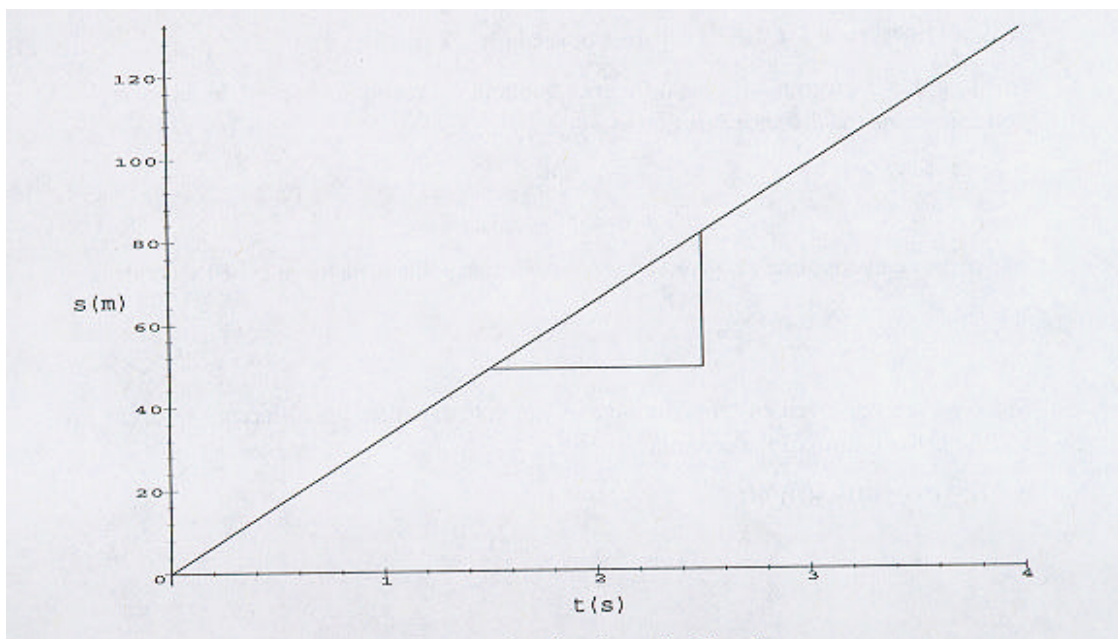


Figura 2.7 Calculando a quociente de diferença do gráfico

de somas e subtrações de funções, e qual a quociente de diferença de uma função multiplicada por uma constante?

Regra Geral 3: O quociente diferencial de uma soma de funções é a som das diferenças de quocientes : $DQ(f+g) = DQ(f) + DQ(g)$.

Queremos mostrar que $DQ(f+g) = DQ(f) + DQ(g)$. Em outras palavras, você pode somar as funções primeiro e então tirar a quociente de diferença e vice-versa.

Prova: Este é um bom momento para ilustrar como dizer ao Maple a respeito de somar funções. Se f e g são duas funções, a soma é simplesmente $f+g$. Se você quiser avaliar esta função combinada em x , a sintaxe do comando é

`>(f+g)(x);`

$$f(x) + g(x)$$

Formula 1

Veja que os parênteses em torno de $(f+g)$. Eles dizem tanto f quanto g serão avaliados em x . Agora formamos quociente de diferença para $f+g$.

>((f+g)(x+dx)-(f+g)(x))/dx;

$$\frac{f(x+dx) + g(x+dx) - f(x) - g(x)}{dx}$$

Formula 2

É bem óbvio que isto é o mesmo que o quociente de diferença de f somado ao quociente da diferença de g.

>(f(x+dx) - f(x))/dx + (g(x+dx)-g(x))/dx;

$$\frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} + \frac{g(x+dx) - g(x)}{dx}$$

Formula 3

Este último resultado pode ser reduzido a um denominador comum usando o comando *normal*.

>normal((f(x+dx) - f(x))/dx + (g(x+dx)-g(x))/dx);

$$\frac{f(x+dx) + g(x+dx) - f(x) - g(x)}{dx}$$

Formula 4

Considerando que a formula 2 é idêntica à 4, aqui se estabelece a regra geral 3.

Sua vez: Mostre que o quociente de diferença de fg é o mesmo que o quociente de diferença de f menos o quociente de diferença de g .

Resposta: _____

Regra Geral 4: O quociente de diferença de uma função multiplicado por uma constante é igual à constante multiplicada pelo quociente de diferença de uma função: $DQ(cf(x)) = cDQ(f(x))$.

Prova: use o Maple para formular quocientes de diferença.

>(c*f(x+dx) -c*f(x))/dx = c*(f(x+dx) - f(x))/x;

$$\frac{cf(x+dx) - cf(x)}{dx} = \frac{c(f(x+dx) - f(x))}{dx}$$

Você deve ser capaz de perceber que os dois lados da equação são a mesma coisa. Se você precisar de uma prova mais a fundo vamos expandir os dois lados.

>expand((c*f(x+dx) -c*f(x))/dx = c*(f(x+dx) - f(x))/x);

$$\frac{cf(x+dx)}{dx} - \frac{cf(x)}{dx} = \frac{cf(x+dx)}{dx} - \frac{cf(x)}{dx}$$

Os dois lados estão idênticos e aprova está completa. Agora continuaremos a investigar o quociente de diferença de uma função quadrática. Mostraremos dois exemplos.

Exemplo 2-5 Variação Quadrática Básica

Ache o quociente de diferença de uma função quadrática.

Resolução: Uma função quadrática pega um número e o multiplica por ele mesmo. Em forma de equação, é $y = x^2$. Em notação funcional é

`>sq := x-> x^2;`

$$sq := x \rightarrow x^2$$

O quociente de diferença para a função quadrática é

`>(sq(x+dx) – sq(x))/dx;`

$$\frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx}$$

Certifique-se de você entenda o que foi feito no comando. Você usa *sq* ao invés de *f* porque *sq* é o nome para esta função em particular. Então nós avaliamos a função em dois pontos $x+dx$ e x , assim como fizemos na equação 2-9. Este comando é exatamente o mesmo que a fórmula para o quociente de diferença, usando *sq* como um nome específico para a função *f* na equação 2-8.

O resultado pode ser simplificado usando *expand*.

`>expand((sq(x+dx) – sq(x))/dx);`

$$2x + dx$$

O termo dx saiu do quociente de diferença para variação constante e linear. No caso da variação quadrática, a expressão para quociente de diferença contém dx . Isto significa, é lógico, que o resultado depende de dx . Reveja as figuras 2.3 e 2.4. Nelas você viu que o tamanho do lado dx afeta o encaixe da hipotenusa com a curva que representa a função. Quanto menor dx melhor o encaixa.

Exemplo 2-6: Variação Linear e Quadrática Combinadas – A Equação Logística

Ache o quociente de diferença para a equação logística $y = f(x) = kx(1-x)$. Qual a velocidade do crescimento de y quando $x = 1/3$ e $k = 3$?

Resolução:

```
>f := x-> k*x*(1-x);
```

$$f := x \rightarrow kx(1-x)$$

```
>DQ = (f(x+dx) - f(x))/dx;
```

$$DQ = \frac{k(x+dx)(1-x-dx) - kx(1-x)}{dx}$$

```
>simplify(DQ = (f(x+dx) - f(x))/dx);
DQ = -k(2x-1+dx)
```

```
>expand(simplify(DQ = (f(x+dx) - f(x))/dx));
```

$$DQ = -2kx + k - kdx$$

Lembre-se de que você não tem que re-digitar todos os comandos. Você tem que digitar a definição da função logística e a fórmula para o quociente de diferença. Depois digite o comando *simplify* e copie a fórmula do quociente de diferença da linha de inserção que você acabou de digitar. Da mesma forma copie todo o comando de simplificação e cole entre os parênteses do comando *expand*. Desta forma você pode visualizar todos os resultados intermediários digitando apenas um pouco mais.

Considerando que a fórmula logística contém um termo quadrático, existe um dx no resultado.

- (b) Para avaliar o quociente de diferença para valores dados de k e x , simplesmente substitua os valores no resultado.

```
>subs( x =1/3, k = 3expand(simplify(DQ = (f(x+dx) - f(x))/dx)));
```

$$DQ = 1-3dx$$

O valor do quociente de diferença para os dados valores de k e x é $1-3dx$.

Quando o quociente de diferença contém dx , você naturalmente perguntaria, “Qual o tamanho de dx ?” Esta pergunta vai ao coração do cálculo diferencial. Para ajuda-lo a chegar à resposta, vamos fazer o gráfico da equação logística $y = f(x) = 3x(1-x)$ (Figura 2.8).

```
>plot({ 3*x*(1-x), [[1/3, 0], [1/3, subs(x=1/3, 3*x*(1-x))]]}, x=0 .. 1, color black);
```

Queremos calcular o aumento de y quando deixamos x crescer a um pouco mais que $1/3$. Vamos chamar este pouco de dx . Vamos plotar o gráfico para um pequeno intervalo em torno de $x = 1/3$, e vamos construir um triângulo cujos lados são dx e $y(x+dx) - y(x)$.

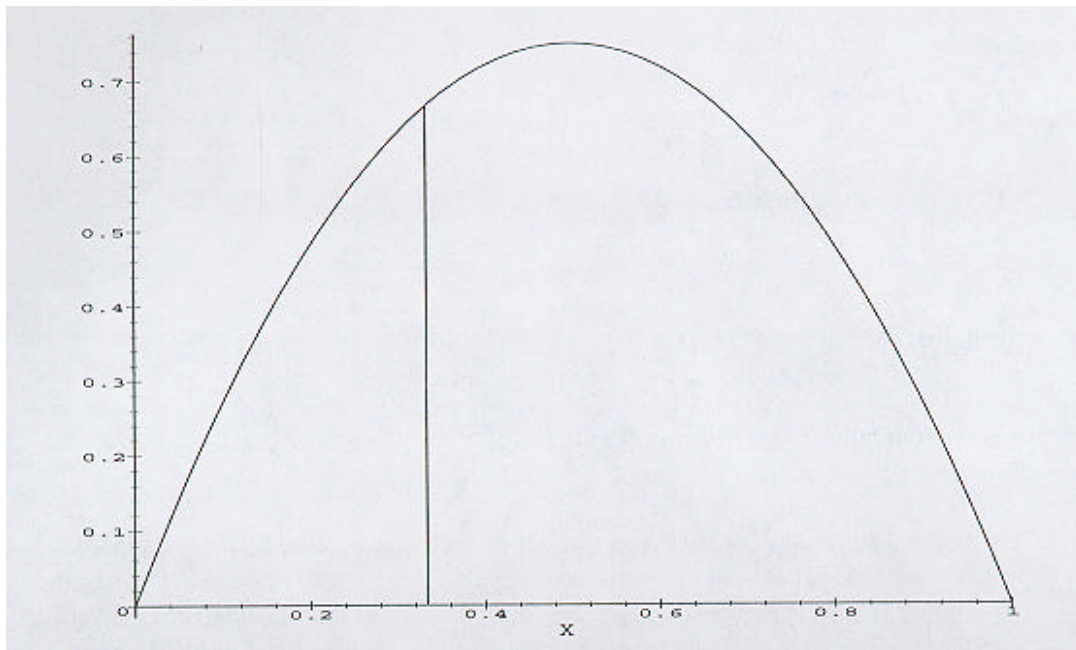


Figura 2.8 O valor da equação logística $y = 3x(1-x)$ em $x = 1/3$

```
>y := x->3*x*(1-x); dx := 0.01;
```

```
y := x -> 3x(1-x)
dx := .01
```

```
>plot( {y, [[1/3, y(1/3)], [1/3+dx, y(1/3)], [1/3+dx, y(1/3+dx)]], 1/3-dx .. 1/3 + 2*dx,
color=black);
```

A base do triângulo na figura 2.9 é $dx = 0.01$. A altura é

```
>y(1/3+dx) - y(1/3);
```

```
.009699998
```

Logo o quociente de diferença é (aproximadamente)

```
>.0097/.01;
```

```
.9700000000
```

O quociente de diferença é um numero um pouco menor que 1.

Veja que a hipotenusa do triângulo parece estar bem em cima da curva y . Nós escolhemos um valor para dx pequeno o bastante para que o gráfico de $y = 3x(1-x)$ pareça uma linha

reta no intervalo $x = 0.33 \dots 0.35$. Isto é uma observação importante. Por um motivo, isto significa que poderíamos substituir a parte da curva entre $x = 1/3$ e $x = 1/3 + 0.01$ pela hipotenusa do triângulo formado pelo quociente de diferença sem cometer um grande erro. Esta noção será tratada mais a fundo na próxima seção. Onde começamos a discutir limites.

A Idéia de Um Limite

Você pode ver na Figura 2.9, que a medida em que dx diminui, a hipotenusa vai quase coincidindo com a função. O quociente de diferença se aproxima de $3 - 6x$, ou no caso da equação logística geral o quociente de diferença se aproxima de $k - 2kx$ (veja no exemplo 2-6).

Você pode chegar a este resultado do quociente de diferença simplesmente ajustando $dx = 0$, mas aí você estaria dividindo a fórmula por 0. Qual o valor mínimo para dx ? Vamos tentar vários valores para dx e ver como o quociente de diferença vai ser avaliado. Vamos começar com a definição do quociente de diferença, expressado em notação funcional:

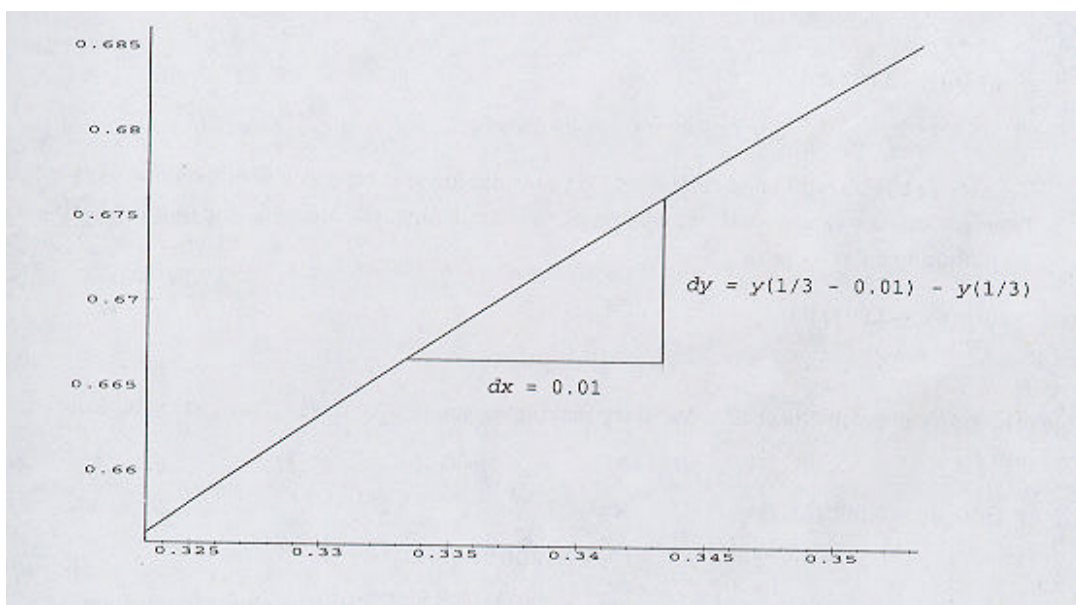


Figura 2.9 O quociente diferencial para a equação logística em $x = 1/3$ e $dx = 0.01$.

>dq1 := f -> (f(x+dx) - F(x))/dx;

$$dq1 := f \rightarrow \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

Certifique-se de que dx não tem um valor numérico da seguinte forma:

>dx := 'dx';

Defina a função que queremos investigar em particular: a função logística.

>f := x -> 3*x*(1-x);

$$f := x \rightarrow 3x(1-x)$$

Ache o quociente diferencial para o caso $x = 1/3$ e dê um nome ao resultado. O nome . Perceba a utilização do comando subs para dar o valor de x.

>R := subs(x=1/3, dq1 (f));

$$R := \frac{3(\frac{1}{3} + dx)(\frac{2}{3} - dx) - \frac{2}{3}}{dx}$$

Vamos usar o comando subs novamente para calcular o quociente de diferença para vários valores de dx.

>subs(dx = 0.01, R);

.969999800

Este resultado já foi calculado. Nós o incluímos aqui apenas para checar nosso trabalho. Copie e cole esta equação, e então edite o numero 0.01 escrevendo um zero a mais.

>subs(dx = 0.001,R);

.9969998000

O resultado é bem mais próximo de 1. Vamos tentar dx ainda menor para ver se chegamos mais próximos de 1.

>subs(dx = 0.0001, R);

.9996980000

A técnica parece estar funcionando. Quanto menor o valor de dx, mais próximo o quociente de diferença chega de 1. Vamos tentar um valor muito menor para dx.

>subs(dx = 0.0000001,R);

Não queremos mais trabalhar com 100 dígitos, então retornamos aos 10 dígitos iniciais com o comando:

>Digits := 10;

Digits := 10

(Também poderíamos ter simplificado o quociente de diferença antes de substituir dx)

>simplify(dq1(f));

-6x + 3 - 3dx

Agora o número de dígitos não importa mais. Na verdade, se fizermos dx bem pequeno e substituirmos na expressão acima, o resultado será 1.

>subs(dx = 0.00000000001, subs(x = 1/3, -6*x+3-3*dx));

1.0000000000

Porque tivemos o resultado correto desta vez? Veja que não estamos mais dividindo por dx. Se valor para dx no comando acima é zero, o termo contendo dx simplesmente sai completamente da expressão. Em outras palavras determinando dx como zero nos fornece a resposta correta. Na verdade, a resposta está correta para um número infinito de casas decimais. Mas, como podemos ter certeza de que está correto? Lembre-se se determinarmos dx como zero aqui, tem que ser zero no começo do problema também. Mas aí o quociente de diferença é reduzido a $\frac{f(x+0) - f(x)}{0} = \frac{f(x) - f(x)}{0} = \frac{0}{0}$, que é indefinido.

A escapatória para este dilema está na seguinte questão, “Com quantas casas decimais queremos trabalhar? ”Seja lá qual for a resposta, faça com que dx seja menor que a ultima casa decimal e se quiser adicione alguns zeros. Claro, se está trabalhando com Maple, você tem que especificar o numero de casas decimais com que quer trabalhar. E seus cálculos para o quociente de diferença serão precisas em relação a estas casas decimais.

A teoria de limites faz com que estes argumento sejam mais precisos. Você viu que o próprio quociente de diferença produz um resultado, 0/0 se dx for 0. Ainda o quociente de diferença se aproxima de 1 a medida que fica menor, mas não tão pequeno quanto 0. O número ao qual o quociente de diferença se aproxima desta forma se chama limite (se existir um) do quociente de diferença a medida que dx se aproxima de 0. Em símbolos é expressado da seguinte forma

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = k \quad (2-13)$$

Usando o Maple expressamos assim:

>Limit(f(x), x=0) = k;

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = k \quad (2-14)$$

Veja que o comando *Limit* começa com letra maiúscula. Use esta forma quando você não quer que o Maple realize todo o cálculo. (você sempre pode trabalhar a resposta mais tarde, o que você vai aprender a fazer na próxima seção.) Veja também que sintaxe do comando do Maple é $x=0$, o que significa “a medida que x se aproxima de zero de qualquer direção.” O limite pode ou não existir. Geralmente o Maple avisa quando não há limite.

Calculando o Limite de $\sin(x)/x$

Mais tarde quando tentarmos encontrar a derivada de $\sin(x)$, vamos ver uma expressão como $\sin(x)/x$ e teremos que definir o seu valor em $x=0$. O primeiro passo para decidir que valor designar, é plotar a função. Visto que queremos visualizar a função em $x = 0$, não queremos o eixo y em nosso caminho. Usaremos a opção de plotagem `axés = boxed` para excluir a linha do eixo y .

>plot(sin(x)/x = -Pi .. Pi, axés = boxed);

o gráfico tem valor próximo a 1 quando está próximo de 0.

O gráfico da figura 2.10 foi produzido pelo Maple Version 3 (V3). Veja o pequeno “buraco” em $x=0$. O Maple está tentado nos dizer que não existe valor para $\sin(x)/x$ em $x = 0$. Então ele deixa este ponto de fora. Por algum motivo o Maple V4 desenha uma curva suave que não indica que a função não é definida em $x = 0$.

Agora temos uma boa imagem do comportamento de $\sin(x)/x$ aos arredores de $x = 0$, podemos calcular os valores para valores muito pequenos de .

>S := sin(x)/x;

$$S := \frac{\sin(x)}{x}$$

Vamos tentar $x = 0.001$ e avaliar $\sin(x)/x$.

>subs(x = 0.001, S);

$$1000. \sin(.001)$$

Isto não ajudou muito, porque o Maple não converte $\sin(.001)$ automaticamente para um número decimal. Mas, tudo que temos que fazer é evoluir a função `evalf` ao redor do comando:

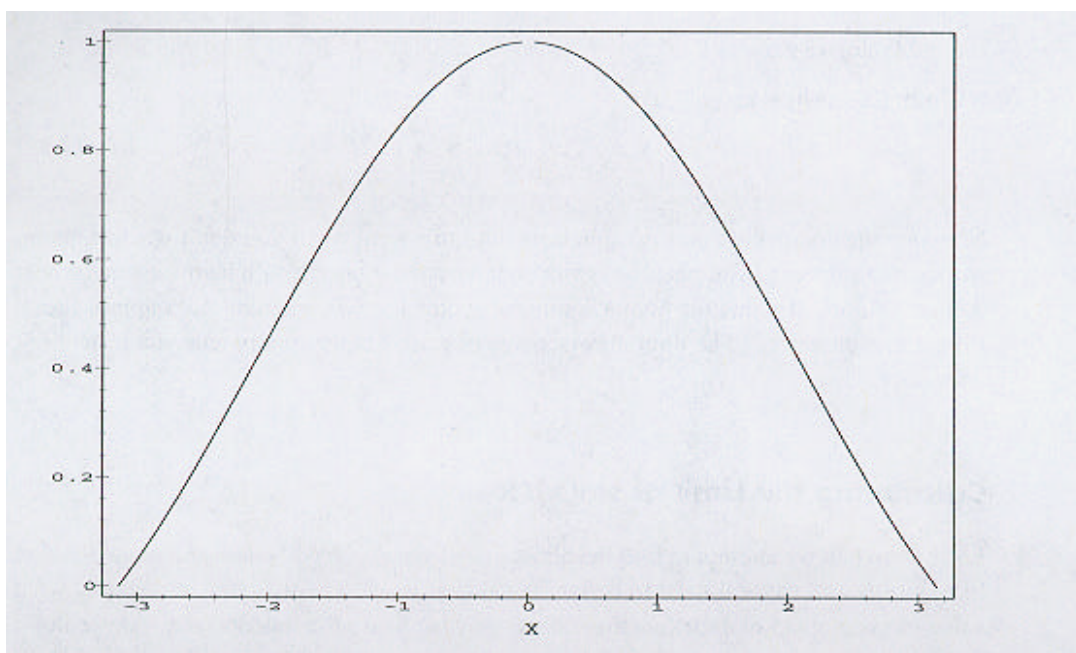


Figura 2.10 Gráfico de $\sin(x)/x$ ao redor de $x = 0$

evalf(subs(x = 0.001, S));

.9999998333

O resultado confirma nossa conclusão baseada no gráfico de $\sin(x)/x$. O resultado difere de 1 na sétima casa.

Sua vez:

Use o diagrama da figura 2.11 para provar que o limite de $\sin(x)/x$ é 1. Daremos algumas dicas enquanto você avança.

1. O segmento DOB tem raio 1. O ângulo do vértice do segmento DOB = x . Demonstre que o comprimento do arco também é x . Use a fórmula para comprimento de arco circular.
2. A distância reta DB é maior ou menor que o comprimento do arco x ? X é maior ou menor que BC? Expresse a ordem destas três medidas como uma inequação

Resposta: _____

3. Expresse DA em termos de x usando trigonometria. Resposta: _____

4. Expresse CB em termos de x usando trigonometria. Resposta: _____

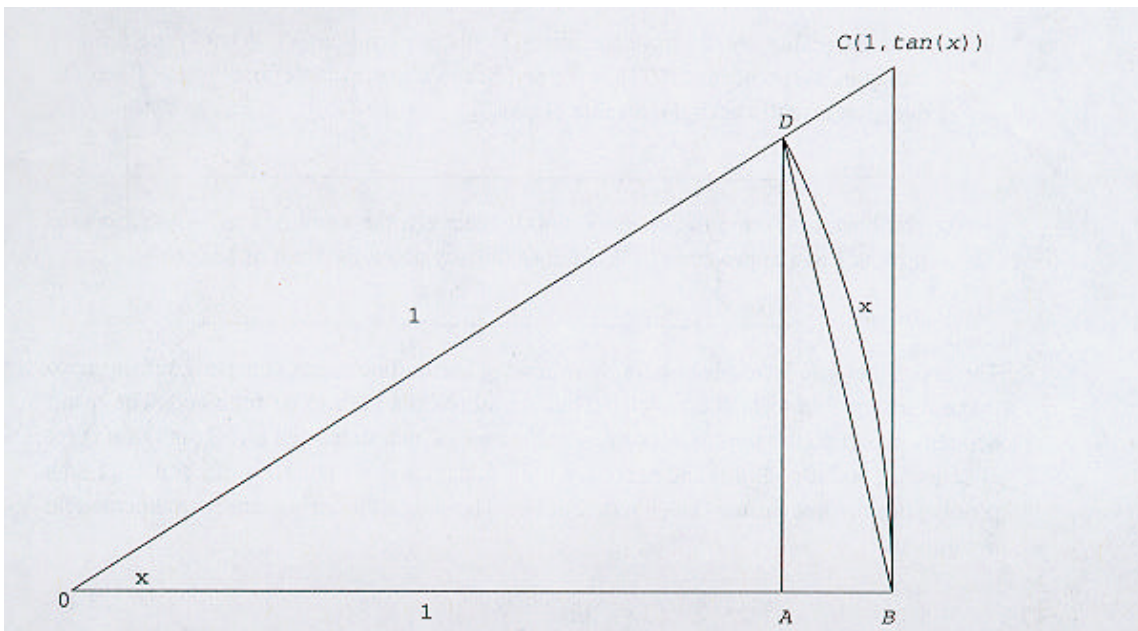


Figura 2.11 Diagrama demonstrando que $\sin(x)/x = 1$

5. Descreva os comprimentos AD , x e BC em ordem crescente. Use sinais de inequação para expressar a ordem dos termos. Use o passo 2 para ajuda-lo a decidir onde fica x na ordem.

Resposta: _____

6. Substitua o passo 5 por DA e CB , usando os resultados dos passos 3 e 4. Agora você tem uma inequação que contém apenas x e funções trigonométricas de x .

Resposta: _____

7. Divida cada termo da inequação por $\sin(x)$. Neste momento você deveria ter uma inequação com os seguintes termos: 1 , $x/\sin(x)$, e $\tan(x)/\sin(x) = 1/\cos(x)$.

Resposta: _____

8. Tire as recíprocas de cada termo. Lembre-se de reverter os sinais de desigualdade, por que se $x > y$, então $1/x < 1/y$.

Resposta: _____

9. Sua inequação deveria ter os termos 1, $\sin(x)/x$ e $\cos(x)$. Qual o limite do $\cos(x)$ a medida em que x se aproxima de 0? Isto é fácil porque $\cos(x)$ é definido como $x=0$, logo a questão na verdade é qual o valor do $\cos(0)$?

Resposta: _____

10. Você determinou a quantidade $\sin(x)/x$ entre o número 1 e $\cos(x)$, cujo limite é um enquanto x se aproxima de 0. O que isto diz a respeito do limite de $\sin(x)/x$?

Resposta: _____

A prova que você deu seguindo os direcionamentos, necessita de um fortalecimento para ser aceitável para matemáticos, mas já mostra o caminho a ser seguido. O resultado depende em parte do teorema squeeze, que determina que se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para x próximo a a e ambos $f(x)$ e $h(x)$ tendo limite L , então $g(x)$ também tem limite L . Você pode achar provas deste teorema na maioria dos livros de cálculo. O resultado final pode ser expressado em notação matemática da seguinte forma:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad (2-15)$$

Tentativa de Calcular o Limite de $\sin(x)/|x|$

A equação 2-15 pode ser usada para derivar muitos outros limites trigonométricos que reduzem 0/0 ao ponto onde o limite está sendo calculado. Talvez possamos usá-la para calcular o limite de $\sin(x)/|x|$ quando x se aproxima de 0. Seguindo o procedimento demonstrado na seção anterior a primeira coisa a fazer é plotar o gráfico. No Maple o valor absoluto de x é escrito $\text{abs}(x)$.

>plot(sin(x)/abs(x), x=-Pi .. Pi);

Agora temos um problema! O gráfico mostra que a função dá um grande pulo em $x = 0$ (Figura 2.12) O limite não existe. A condição para o limite existir é que o valor da função deve ser próximo ao valor do ponto do limite para qualquer valor próximo a x . Desde que isto não é verdade para a função $\sin(x)/|x|$, ela não tem um limite em $x=0$. Vamos ver o que o Maple diz do limite de $\sin(x)/|x|$ quando x se aproxima de 0.

>limit(sin(x)/abs(x), x = 0);

Undefined

A noção de limites pode ser estendida para incluir os limites direcionais. Neste caso, o limite é Calculado quando x se aproxima do ponto de limite apenas por um lado. Podemos ver, através do Maple, se existe o limite direcional para $\sin(x)/|x|$.

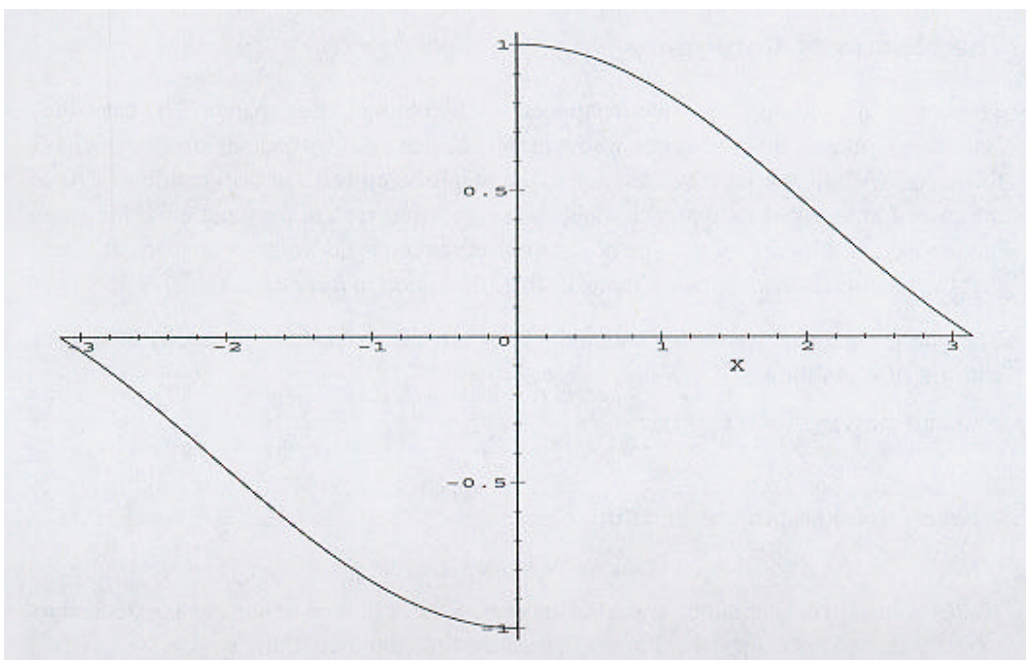


Figura 2.12 Gráfico de $\sin(x)/|x|$ de $-\pi$ a π

>limit(sin(x)/abs(x), x = 0, right);

1

>limit(sin(x)/abs(x), x = 0, left);

-1

Estas respostas correspondem ao gráfico.

Agora falta rever o processo de encontrar o limite a um dado valor de x .

1. Se a função existe em x , o limite é simplesmente o valor da função.
2. Se a função é avaliada a um valor indefinido, como $0/0$, use o Maple para plotar o gráfico da função para um intervalo de valores de x próximo ao ponto em questão. O gráfico deve te dar uma boa ideia se o limite existe e se existe, qual é
3. Use o comando *limit* do Maple. É capaz de calcular a maioria dos limites dos cálculos introdutórios universitários.

A Noção De Continuidade

A noção de continuidade já foi mencionada anteriormente neste capítulo. A idéia básica é que uma função continua é aquela que você pode desenhar sem tirar o lápis do papel. Vamos restringir a discussão para o comando do Maple que testa a continuidade. No caso dos limites, a primeira abordagem deve ser desenhar o gráfico da função. Se o gráfico tiver uma quebra ou pulo, em algum valor de x , então a função não é continua neste ponto. É dito que a função é descontínua aí ou que x é o ponto de descontinuidade.

O comando Maple para testar a continuidade é *iscont*. Podemos testar a continuidade de $\sin(x)/x$ e $\sin(x)/|x|$ da seguinte forma:

```
>iscont(sin(x)/x, x = -Pi .. Pi);
```

```
false
```

```
>iscont(sin(x)/abs(x), x = 0 -Pi .. Pi);
```

```
false
```

Nenhuma das funções é continua em $x = 0$. Porém, se a definição de $\sin(x)/x$ for estendida definindo o valor de $\sin(x)/x = 1$ em $x = 0$, então a função é contínua.

Exercícios de Papel e Lápis

PP2-1

Escreva o comando Maple para plotar a função constante $f(x) = 10$ de $x = -1$ até $x = 1$ em duas formas diferentes. Use (a) uma expressão no comando plot e (b) notação funcional para $f(x) = 10$.

(a) Resposta: _____

(b) Resposta: _____

PP2-2: As Origens do Quociente de Diferença

- (a) Encontre a velocidade de um carro dos quadros 30° ao 31° se $s(30) = 1.150$ pés e $s(30+1/15) = 1.155$ pés.

Resposta: _____

- (b) Converta a resposta para milhas por hora.

Resposta: _____

PP2-3: Mudança de Fração no Preço da Manteiga

- (a) O preço da manteiga aumentou de \$3.40 para \$3.65. Qual a mudança de fração no preço?

Resposta: _____

- (b) Qual a variação de porcentagem?

Resposta: _____

PP2-5

Um país apresenta um crescimento fracionário em sua população ao fim de um ano de 0.015. A população do país no início do ano era 640.000.000.

- (a) Quantas pessoas a mais esta mudança de fração representa?

Resposta: _____

- (b) Qual o crescimento da população deste ano expressado em porcentagem?

Resposta: _____

PP2-6

A formula para converter temperaturas de Fahrenheit para Celsius é

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

- (a) Ache o Quociente de diferença $\frac{\Delta C}{\Delta F} = \frac{C(f + \Delta F) - C(F)}{\Delta F}$. Aqui ΔF tem

tem o mesmo significado de dx . É uma pequena diferença no valor de F . Similarmente, ΔC é a pequena mudança em C resultando da pequena mudança em F .

Resposta: _____

(b) Qual a interpretação do quociente diferencial $\frac{\Delta C}{\Delta F}$?

- (i) É uma temperatura em Fahrenheit em termos de graus Celsius?
- (ii) É uma temperatura em Celsius em termos de graus Fahrenheit?

Resposta: _____

PP2-7

Ache o quociente de diferença de $y = 1/x$ por métodos algébricos.

- (a) Escreva a fórmula do quociente de diferença para esta função.

Resposta: _____

- (b) Simplifique a fórmula achando um denominador comum.

Resposta: _____

- (c) Determine $\Delta x = 0$ (ou $dx = 0$ dependendo em qual símbolo estiver usando) em sua resposta para a parte b. Esta é a derivada de $1/x$ em relação a x .

Resposta: _____

PP2-8

Escreva os comando adequados para realizar as seguintes tarefas.

- (a) Plotar um gráfico da função linear $F = \frac{9}{5}C + 32$ com o intervalo de $C = -40$ até 100 graus Celsius.

Resposta: _____

- (b) Definir a função “cúbica”, cb , em termos da variável x de forma que esta função eleve ao cubo a sua inserção; Por exemplo, $cb(3) = 27$.

Resposta: _____

- (c) Defina a função recíproca.

Resposta: _____

- (d) Você pode definir funções de duas variáveis usando a sintaxe, $f := (x, y) \rightarrow \text{expressão}$

envolvendo x e y . Defina o quociente de diferença simétrico e dê o nome sdq . Use as variáveis $x1$ e $x2$ ao invés de x e y .

Resposta:_____

(d) Qual dos comando resulta na mensagem *syntax error*?

(i)> 'your turn';

(ii)> "your turn";

Resposta:_____

PP2-9

(a) > plot(9/5*C+32, C=-40 .. 100);

(b) > cb := x->x^3;

(c) > x -> 1/x;

(d) > sqd := (x1, x2) ->(f(x2) - f(x1))/(x2 - x1);

PP2-10

Dada a equação logística $x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n (1 - x_n)$ e um valor inicial $x_0 = \frac{1}{2}$, Calcule de cabeça

(a) x_1 Resposta:_____

(b) x_2 Resposta:_____

(c) Estime x_∞ Resposta:_____

PP2-11

Relacione os comandos do Maple que produzem os seguintes resultados:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ Resposta:_____

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) = 0$ Resposta:_____

(c) $\lim_{x \rightarrow 3+} \frac{|x-3|}{x-3} = 1$ Resposta:_____

$$(d) \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{|x-3|}{x-3} = 1$$

Resposta: _____

$$(e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = 1$$

Resposta: _____

$$(f) \text{ Baseado em suas resposta às partes (c) e (d), qual é o } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3|}{x-3} = 1$$

Resposta: _____

Maple Lab

ML2-1

Verifique estas regras gerais das propriedades dos limites usando o comando Limit do Maple. (Na verdade você está vendo se o Maple sabe estas regras).

(a) O limite de uma função constante:

>assume (c, Constant);

>Limit (c, x = a) = value(Limit(c, x = a));

Esta não é a mesma regra geral 1 do capítulo 1. Por que ?

Resposta: _____

(b) O limite de uma função multiplicada por um constante:

>Limit(c*f(x), x = a) = expand(Limit(c*f(x), x = a));

A forma desta regra é a mesma regra geral 2 para o quociente de diferença?

Resposta: _____

ML2-2: O Quociente de Diferença

Defina a fórmula geral para o quociente de diferença como

>dq := f -> (f(x+dx) - f(x))/dx;

$$dq := f \rightarrow \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

Note que nossa definição requer que f seja uma função. Logo, se o quociente de diferença de f(x) = x é requerido você definiria a seguinte função do Maple

>X := x ->x;

$$X := x \rightarrow x$$

>dq(X);

1

Ou você poderia simplesmente por a definição funcional no comando dq:

>dq(x->x);

1

Desenvolva os quocientes de diferença para as seguintes funções. Escreva as respostas agrupando os termos contendo dx(quando houverem) de forma que simplifique a expressão. Use os comando *expand*, e se você desejar, *collect e simplify* para organizar sua resposta da forma mais compreensível.

(a) A função $f(x) = 3x + 2$

>dq(x->3*x +2);

Resposta:_____

(b) A função $f(x) = 20x^2 - 40x + 1.234$

>dq(x->20x^2 - 40*x +1234);

Resposta:_____

(c) A função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$

>dq(x->x^3-3*x^2+2*x+1);

Resposta:_____

(d) A função $f(x) = 1/x$

>dq(x->1/x);

Resposta:_____

(e) A função $f(x) = 1/x^2$

>dq(x->1/x^2);

Resposta:_____

ML2-3: O Quociente de Diferença Quando x se Aproxima de 0

Ache o limite quando x se aproxima de nas suas respostas para ML2-2 usando o comando limit do Maple.

(a)

>limit(dq(x->3*x +2), dx = 0);

Resposta:_____

(b)

> limit(dq(x->20x^2 – 40*x +1234)), dx = 0);

Resposta:_____

(c)

> limit(dq(x->x^3-3*x^2+2*x+1)), dx = 0);

Resposta:_____

(d)

> limit(dq(x->1/x)), dx = 0);

Resposta:_____

(e)

> limit(dq(x->1/x^2), dx = 0));

Resposta:_____

Compare suas respostas aqui com as resposta em ML2-2. Você obtem estes resultados sendo $dx = 0$ em ML2-2?

Resposta:_____

ML2-4

Ache o quociente de diferença dq destas funções e então aplique o comando limit (quando dx se aproxima de 0) para achar as fórmulas das derivadas das funções.

- | | |
|---|----------------|
| (a) $f := x \rightarrow x^n$; (Função exponencial) | Resposta:_____ |
| (b) $f := x \rightarrow \sin(x)$; (Função seno) | Resposta:_____ |
| (c) $f := x \rightarrow \cos(x)$; (Função cosseno) | Resposta:_____ |
| (d) $f := x \rightarrow \exp(x)$; (Função e^x) | Resposta:_____ |
| (e) $f := x \rightarrow 10^x$; (uma função exponencial) | Resposta:_____ |
| (f) $f := x \rightarrow \ln(x)$; (Função Logarítmica) | Resposta:_____ |
| (g) $f := x \rightarrow \log_{10}(x)$; (Função $\log_{10}$) | Resposta:_____ |

(h) $f := x \rightarrow \sqrt{x}$; (Função de raiz quadrada) Resposta: _____

ML2-5: Por Que Matemáticos Usam Medidas Em Radianos

Na última questão foi pedido que você encontrasse o limite do quociente de diferença para a função $f: x \rightarrow \sin(x)$. O ângulo x foi medido em radianos, considerando que o Maple só mede ângulos em radianos.

Nesta questão você deve encontrar o limite do quociente de diferença da função $f: x \rightarrow \sin(180x/\pi)$. Você perceberá que a tarefa é encontrar a derivada de $\sin(X)$, onde X está em graus. Em sua resposta dê a fórmula de limites e compare a sua resposta do ML2-4b. Entendeu porque os matemáticos preferem radianos a graus?

(a) O comando Maple para limite é: Resposta: _____

(b) A resposta do Maple para este limite é: Resposta: _____

(c) Qual fórmula é mais simples, ML2-4b ou ML2-5b? Resposta: _____

ML2-6

Investigue o limite de $\frac{\tan(x)}{x}$ quando x se aproxima de zero.

(a) Qual o valor de $\tan(x)/x$ em $x = 0$? Resposta: _____

(b) Faça o gráfico da função $\tan(x)/x$, $x = -\pi/4 \dots \pi/4$. O parece ter um limite quando x se aproxima de 0?

Resposta: _____

(c) O gráfico $\frac{\tan(x)}{x}$ é diferente do gráfico de $\frac{\sin(x)}{x}$ na região $0 < x < 1$? Descreva qualquer diferença.

Resposta: _____

(d) Qual o limite de $\frac{\sin(x)}{x}$ quando x se aproxima de $\pi/2$? Resposta: _____

(e) Existe o limite de $\tan \frac{(x)}{x}$ em $x = \pi/2$? Resposta: _____

(f) Qual o limite de $\frac{5x - 2 \tan(x)}{x}$ quando x se aproxima de 0?

Resposta: _____

ML2-7

Investigue o limite da função $|6x - 5 - x^2|$ em $x = 1$ e em $x = 5$.

(a) Faca o gráfico da expressão, e então desenhe aqui.

Resposta: _____

Use o comando *limit* do Maple para encontrar os limites em $x=1$ e em $x=5$.

Resposta: _____

(c) Calcule o quociente de diferença em $x=1$. Primeiro defina a função $f := x \rightarrow \text{abs}(6*x - 5 - x^2)$; então calcule $dq(x)$. Avalie o quociente de diferença com $dx = 0.1$ usando o comando *evalf* (*subs*($x=1$, $dx=0.1$, $dq(x)$));

Resposta: _____

(d) Repita o comando da parte (c) com valores menores de dx , como 0.01 e 0.001. Como aparece o valor de limite?

Resposta: _____

(e) Calcule o quociente de diferença usando a forma simétrica, *sdq* (defina *sdq* como *sdq* := ($x1, x2$) -> ($f(x2)-f(x1)/(x2-x1)$);). Comece com $x1 = 1.1$ e $x2 = 0.9$, então use $x1=1.01$ e $x2 = 0.99$, e assim por diante. Como aparece o valor de limite?

Resposta: _____

(f) Use o Maple para tirar o limite de dq em $x=1$. Use o comando *limit*(*dq*(1), $dx = 0$);

Resposta: _____

(g) A função fica pontiaguda em $x=1$ e $x=5$. É necessária muita atenção ao tirar limites destes pontos. Se você tiver respostas diferentes dependendo da maneira que escolher $x1$ e $x2$ no quociente de diferença simétrico, o limite vai ser indefinido.

Nas questões (c) e (d), o quociente de diferença e o quociente de diferença simétrico dão respostas diferentes para o limite. Tente $\text{sqd}(1.0001, .9)$. Qual o resultado desta vez?

Resposta: _____

ML2-8

Se você depositar uma quantia de dinheiro em uma poupança o dinheiro vai ter um rendimento. Geralmente este rendimento é Calculado todo o mês. A formula para calcular este rendimento sobre todo o ano é $P_k = P(1 + \frac{i}{k})^k$, onde k representa o número de períodos por ano os outros parâmetros são:

P_k : O valor do seu dinheiro ao fim do ano

P: O seu investimento inicial.

i: A taxa de rendimento, expressada em fração.

A taxa de rendimento é geralmente apresentada em porcentagem. Antes de usar a fórmula você tem que converter esta porcentagens para seus equivalentes decimais.

Dois bancos usam a mesma taxa de 8% ($i = 0.08$). O banco A Calcula o rendimento 12 vezes ao ano. O banco B decide se tornar mais competitivo e anuncia que vai Calcular os juros todo o dia 365 vezes por ano. E é fundado o banco na cidade que vai Calcular os rendimentos a cada instante, que vai Calcular infinitas vezes dentro do ano.

Sally, Jesse e Rafael tem \$1000 cada um para investir. Sally investe seu dinheiro no banco A, Jesse investe no Banco B e Rafael investe no banco C.

(a) Quanto dinheiro tem na conta de Sally ao fim de um ano?

Resposta: _____

(b) Quanto dinheiro tem na conta de Jesse ao fim de um ano?

Resposta: _____

(c) Quanto dinheiro tem na conta de Rafael ao fim de um ano? Use a o limite $k \rightarrow \infty$ para Calcular P_k .

Resposta: _____

(d) O banco A cobra \$2.00 por mês em taxas de serviços. Os bancos B e C cobram \$2.25, dizendo que fica mais caro manter taxas tão freqüentes. Todos os bancos

calculam uma taxa total de serviços e cobram ao fim do ano ao invés de tiram um pouco a cada mês. Dados estes reveses qual banco é mais lucrativo ao fim do ano?

Resposta:_____

ML2-9

(a) Plote o gráfico de $y = \frac{x^4 - 1}{x - 2}$ no intervalo $x = -10 \dots 10$. Refine a imagem determinando uma escala adequada para o eixo y .

Resposta:_____

(b) O limite $x \rightarrow 2$ existe para y ? Resposta:_____

(c) Compare o caso da parte (a) com a função $f : x \rightarrow \frac{x^4 - 1}{x - 1}$. Plote a função. Qual o valor da função em $x=1$, de acordo com o gráfico?

Resposta:_____

(d) Qual o valor da função quando você avalia $f(1)$?

Resposta:_____

(e) Qual o limite da função $x \rightarrow 1$? Resposta:_____

(f) O limite da função f existe como $x \rightarrow 2$ Resposta:_____

ML2-10

O exercício ML2-7 mostra que o limite de uma função em um ponto x pode existir, ainda que o limite do quociente de diferença não exista. Além de você ter que ser capaz de calcular o quociente de diferença o resultado tem que ser independente da escolha dos dx . Neste problema você vai usar a equação $y = |x|$ para mostrar que o limite do quociente de diferença não existe em $x = 0$, ainda que $|x|$ exista e seja contínuo em $x = 0$. Para que o limite do quociente de diferença exista, não pode ser dependente de uma sequência de valores em particular para se aproximar do limite. Se uma sequência de valores dá um resultado e a outra dá outro resultado, o limite não existe.

- (a) Como em ML2-7, use a forma simétrica do quociente de diferença para tirar dois pontos simétricos um em cada lado de $x = 0$. Os comandos podem ser: `sdq := (x1, x2) -> (f(x2) - f(x1))/(x2-x1); f := x->abs(x); sdq(dx,-dx);`, onde dx é um indeterminante. Você

nem precisa dar um valor a dx . Qual o resultado do ultimo comando, e como parece ser o limite?

Resposta:_____

(b)Agora pegue os pontos $x_1 = 3dx/4$ e $x_2 = -dx/4$. O intervalo total ainda é dx . Como aparece o limite desta vez? Se o Maple der uma resposta em termos de $|dx|/|x|$ como você pode simplifica-la?O que acontece se você determinar dx como positivo?

Resposta:_____

(c)Use o Maple para calcular os limites direito e esquerdo em $x=0$. Eles são diferentes? Quais são?

Resposta:_____